

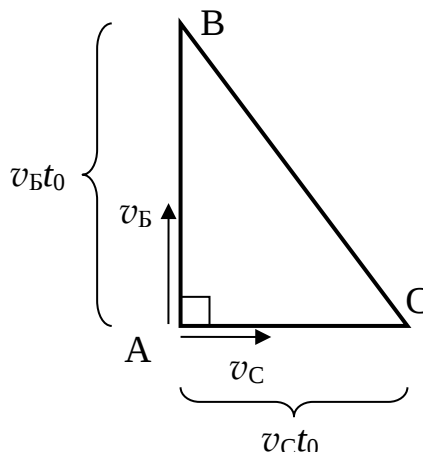
Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 8 класс.

1. Боря и Света бегают по стадиону с постоянными скоростями, Боря в $4/3$ раза быстрее Светы. Стартуя одновременно из центра стадиона, они бегут 7 секунд под прямым углом друг к другу, а затем, повернувшись, бегут навстречу друг другу. Через какое время после поворота они встретятся?

Решение.

Пусть v_B и v_C — скорости Бори и Светы, соответственно. Обозначим центр стадиона точкой А. Через $t_0 = 7$ с бега во взаимно перпендикулярных направлениях Боря и Света удалятся на расстояния $v_B t_0$ и $v_C t_0$ от точки А и окажутся в точках В и С, соответственно. Треугольник ABC — прямоугольный (см. рисунок). Расстояние ВС между ними можно определить по теореме Пифагора:



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(v_B t_0)^2 + (v_C t_0)^2}. \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

Искомое время, через которое они встретятся, равно

$$t = \frac{BC}{v_B + v_C}. \quad (3 \text{ б.})$$

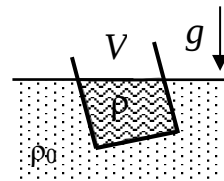
Подставив сюда ВС из (1), вынеся общий множитель t_0 из-под корня, и сократив числитель и знаменатель полученного выражения на v_C , получим:

$$t = \frac{\sqrt{1 + (v_B/v_C)^2}}{1 + v_B/v_C} t_0. \quad (2 \text{ б.})$$

Подставив сюда численные значения, найдём

$$\text{ответ: } t = 5 \text{ (с)}. \quad (2 \text{ б.})$$

2. В тонкостенную кастрюлю, плавающую в жидкости плотности ρ_0 , налили другой жидкости плотности ρ и объёма V . Уровень жидкостей внутри и снаружи кастрюли совпал. Найти массу кастрюли.



Решение.

В равновесии сила тяжести, действующая на кастрюлю с жидкостью, равна силе Архимеда:

$$(m + \rho V)g = \rho_0 Vg . \quad (8 \text{ б.})$$

Выразив отсюда искомую массу, найдём

$$\text{ответ: } m = (\rho_0 - \rho)V . \quad (2 \text{ б.})$$

3. Школьнику захотелось узнать, из какого материала сделан старинный игрушечный солдатик, подаренный ему дедушкой. Для этого он решил измерить его плотность. На воду в прямоугольном прозрачном пластиковом контейнере он опустил игрушечную лодочку, и маркером отметил уровень воды. Затем посадил солдатика в лодочку и заметил, что уровень воды поднялся на $h_1 = 29$ мм выше метки. После чего, не убирая лодочки из контейнера, он бросил солдатика в воду. При этом солдатик оказался полностью погруженным в воду, а уровень воды стал на $h_2 = 4$ мм выше метки. Найти плотность материала, из которого сделан солдатик. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

Решение:

Когда солдатик оказывается в лодке, давление на дно увеличивается на mg/S , где m — масса солдатика, S — площадь дна. С другой стороны, это увеличение давления равно $\rho g h_1$, так как вызвано увеличением уровня воды в сосуде. Откуда

$$h_1 = m/\rho_0 S. \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

Когда солдатик лежит на дне, он вытесняет объём воды, равный m/ρ . При этом уровень воды поднимается на высоту

$$h_2 = m/\rho S. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

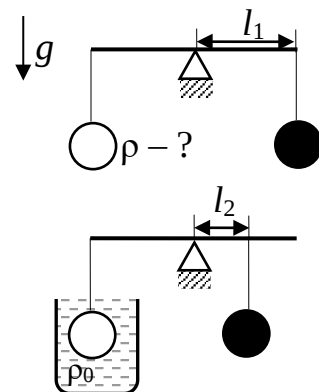
Разделив (2) на (1), и выразив искомую плотность, найдём

$$\rho = \frac{h_1}{h_2} \rho_0. \quad (2 \text{ б.})$$

Подставив сюда значения, найдём

$$\text{ответ: } \rho = \frac{h_1}{h_2} \rho_0 = 7250 \text{ (кг/м}^3\text{)}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. К одному плечу разноплечих рычажных весов подвесили тело неизвестной плотности ρ . К другому плечу на расстоянии l_1 подвесили грузик и система оказалась в равновесии. Затем тело полностью погрузили в жидкость плотности ρ_0 , а грузик перевесили так, что теперь он оказался на расстоянии l_2 . При этом система снова оказалась в равновесии. Найти плотность тела ρ . Плечи весов считать невесомыми.



Решение:

К левому плечу весов приложен вес тела, равный ρVg , где V — объём тела, а к правому — вес грузика mg , где m — масса грузика. Условие равновесия весов запишем в виде:

$$\rho Vg \cdot l = mg \cdot l_1, \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

где l — длина левого плеча весов.

После погружения тела в жидкость, его вес уменьшается на $\rho_0 Vg$. Условие равновесия в этом случае запишется в виде:

$$(\rho Vg - \rho_0 Vg) \cdot l = mg \cdot l_2. \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Разделив (2) на (1) и выразив искомую плотность тела, найдём

$$\text{ответ: } \rho = \frac{\rho_0}{\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)}. \quad (2 \text{ б.})$$

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 9 класс.

1. Равнобедренный треугольник ABC, у которого стороны AB и BC равны, сделан из однородной проволоки. Если измерить сопротивление между точками A и B, то оно окажется в k раз больше, чем сопротивление, измеренное между точками A и C. Найти, во сколько раз отличаются длины сторон AB и AC.

Решение.

Сопротивление однородной проволоки пропорционально её длине l :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2 \text{ б.})$$

где ρ — удельное сопротивление материала проволоки, S — площадь её сечения. Пусть длина сторон AB и BC $l_{AB} = l_{BC} = a$, а длина стороны AC $l_{AC} = b$. Обозначим сопротивления, соответствующие длинам сторон, через

$$R_a = \rho a / S \quad (1)$$

и

$$R_b = \rho b / S. \quad (2)$$

Тогда сопротивление между точками A и B состоит из параллельно соединённых сопротивлений R_a и $R_a + R_b$:

$$R_{AB} = \frac{R_a (R_a + R_b)}{2R_a + R_b}. \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

Сопротивление между точками A и C состоит из параллельно соединённых сопротивлений R_b и $2R_a$:

$$R_{AC} = \frac{R_b \cdot 2R_a}{2R_a + R_b}. \quad (4) \quad (2 \text{ б.})$$

По условию известно, что

$$\frac{R_{AB}}{R_{AC}} = k.$$

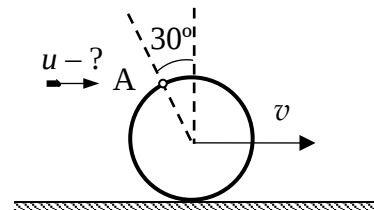
Подставляя сюда R_{AB} из (3) и R_{AC} из (4), предварительно подставив в эти выражения R_a из (1) и R_b из (2), получим

$$\frac{(a+b)}{2b} = k. \quad (2 \text{ б.})$$

Выразив отсюда искомое отношение a/b , получим

$$\text{ответ: } \frac{a}{b} = 2k - 1. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Пустотелый тонкостенный цилиндр катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости со скоростью v . Горизонтально летящая пуля попадает в маленькое отверстие, сделанное в цилиндре в точке А. Радиус цилиндра, проведённый через точку А, образует угол 30° с вертикалью. При дальнейшем движении пуля вылетает через то же отверстие, при этом цилиндр не успевает сделать полный оборот. Найти скорость пули. Силы тяжести нет.



Решение.

Перейдём с систему отсчёта, связанную с осью цилиндра. В этой системе отсчёта цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью, а, следовательно, точка А движется по окружности со скоростью v . (1 б.)

Пуля вылетит через то же отверстие, если точка А опять окажется на той же высоте. Когда это произойдёт, угол между радиусом цилиндра, проведённым через точку А, и вертикалью будет равен 30° , а точка А пройдёт расстояние, равное длине дуги с угловым размером 60° . Это расстояние равно $1/6$ от длины окружности: $l = 2\pi R/6 = \pi R/3$, (1 б.)

где R — радиус цилиндра. Время t , за которое точка А пройдёт это расстояние, равно

$$t = \frac{\pi R/3}{v}. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

За это же время пуля пройдёт по прямой расстояние R . (2 б.)

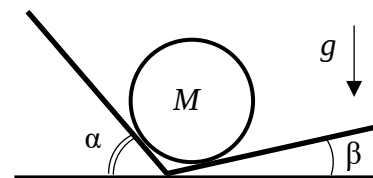
Пусть скорость пули u . Тогда в системе отсчёта, связанной с осью цилиндра, скорость пули $u - v$. Тогда время t пролёта пули от входа в отверстие до выхода из него:

$$t = \frac{R}{u - v}. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

Приравняв правые части выражений (1) и (2) и выразив из получившегося уравнения скорость пули, получим

$$\text{ответ: } u = v \left(1 + \frac{3}{\pi} \right). \quad (2 \text{ б.})$$

3. Однородный цилиндр массой M покоится в жёлобе, образованном двумя плоскостями, наклонёнными под углами α и β к горизонту. Найти разность сил реакции опор ΔN , действующих на цилиндр. Ускорение свободного падения g . Трения нет.



Решение.

На цилиндр действуют сила тяжести Mg , направленная вертикально вниз, сила реакции N_α , направленная перпендикулярно плоскости, наклонённой под углом α , и сила реакции N_β , направленная перпендикулярно плоскости, наклонённой под углом β . Цилиндр покоится, значит, сумма всех этих сил равняется нулю. Запишем это равенство в проекции на вертикальную и горизонтальную оси соответственно:

$$N_\alpha \cos \alpha + N_\beta \cos \beta - Mg = 0. \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

$$N_{\alpha} \sin \alpha = N_{\beta} \sin \beta. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

Решая систему уравнений (1) и (2), найдём выражения для N_{α} и N_{β} :

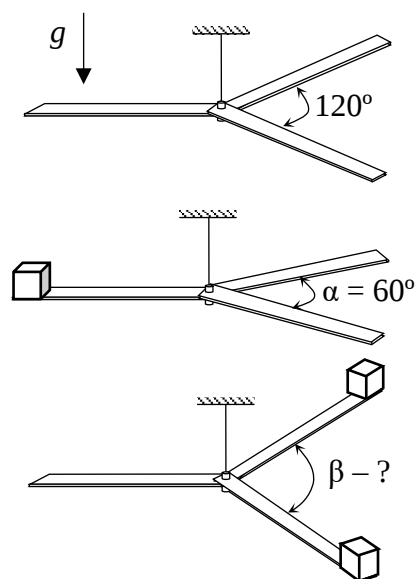
$$N_{\alpha} = Mg \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} = Mg \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (3) \quad (1 \text{ б.})$$

$$N_{\beta} = Mg \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (4) \quad (1 \text{ б.})$$

Вычитая (4) из (3), найдём разность сил реакции:

$$\text{ответ: } \Delta N = Mg \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. Конструкция состоит из трёх одинаковых рычагов, шарнирно закреплённых между собой таким образом, что их можно поворачивать в горизонтальной плоскости относительно общей оси крепления (см. рисунок). Конструкция подвешена с помощью нити за шарнир. В равновесии угол между любыми двумя рычагами равен 120° . Если положить на конец одного из рычагов игрушечный кубик, то для уравнивания конструкции необходимо повернуть два других рычага так, чтобы угол между ними стал равным $\alpha = 60^\circ$. Определите, какой угол β нужно установить между двумя рычагами, чтобы конструкция оказалась в равновесии, если положить два таких же кубика на концы двух рычагов.



Решение.

Пусть длина каждого рычага l , масса — m , а масса кубика — M . Сумма моментов всех сил в равновесии равна нулю. В случае, когда на конце одного из рычагов лежит кубик, условие равновесия можно записать в виде:

$$mg \cdot \frac{l}{2} + Mg \cdot l = 2mg \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (1) \quad (4 \text{ б.})^*$$

В случае, когда лежит 2 кубика, условие равновесия можно записать в виде:

$$mg \cdot \frac{l}{2} = 2Mg \cdot l \cos \frac{\beta}{2} + 2mg \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Выразив M из (1) и подставив в (2), найдём из полученного выражения:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{4 \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) + 2}.$$

Подставив сюда численное выражение для α , получим

$$\text{ответ: } \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (2 \text{ б.})^{**}$$

**Примечание.* Рычаги, в общем случае, не обязаны быть однородными, достаточно, чтобы они были одинаковыми. Тогда их центры масс будут лежать не посередине ($l/2$), а в некоторой точке x , однако на итоговый ответ это не повлияет. За использование однородных рычагов баллы предлагается не снимать.

***Примечание.* Ответы $\cos \beta = -\frac{5}{6}$ и $\beta \approx 146^\circ$ считать верными.

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 10 класс.

1. Окно расположено на высоте H от земли. На расстоянии L от окна по горизонтали стоит сосна, у основания которой на земле сидит белка. Белка увидела, что из окна горизонтально бросают орех в сторону сосны со скоростью v и побежала вертикально вверх по сосне. С какой постоянной скоростью нужно бежать белке, чтобы поймать орех? Ускорение свободного падения g , влиянием воздуха пренебречь.

Решение.

Пусть орех долетел до сосны за время t после броска, т.е. преодолел расстояние L (по горизонтали) между окном и сосной:

$$L = vt. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

При этом, он окажется на высоте

$$h = H - \frac{gt^2}{2} \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

от земли.

Условию того, что орех долетает до сосны, соответствует $h \geq 0$, что с учётом уравнений (1) и (2) даёт

$$H \geq \frac{gL^2}{2v^2}.$$

Чтобы поймать орех, белка, двигаясь с постоянной скоростью u , тоже должна оказаться на этой высоте за время t , т.е.

$$h = ut. \quad (3) \quad (3 \text{ б.})$$

Подставив h из (3) в (2), а затем t из (1) в полученное выражение, найдём

$$\text{ответ:} \quad u = v \left(\frac{H}{L} - \frac{g}{2v^2} \right). \quad (2 \text{ б.})$$

2. Школьнику захотелось узнать, из какого материала сделан старинный игрушечный солдатик, подаренный ему дедушкой. Для этого он решил измерить его плотность. На воду в прямоугольном прозрачном пластиковом контейнере он опустил игрушечную лодочку, и маркером отметил уровень воды. Затем посадил солдатика в лодочку и заметил, что уровень воды поднялся на $h_1 = 29$ мм выше метки. После чего, не убирая лодочки из контейнера, он бросил солдатика в воду. При этом солдатик оказался полностью погруженным в воду, а уровень воды стал на $h_2 = 4$ мм выше метки. Найти плотность материала, из которого сделан солдатик. Плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Решение:

Когда солдатик оказывается в лодке, давление на дно увеличивается на mg/S , где m — масса солдатика, S — площадь дна. С другой стороны, это увеличение давления равно ρgh_1 , так как вызвано увеличением уровня воды в сосуде. Откуда

$$h_1 = m/\rho_0 S. \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

Когда солдатик лежит на дне, он вытесняет объём воды, равный m/ρ . При этом уровень воды поднимается на высоту

$$h_2 = m/\rho S. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

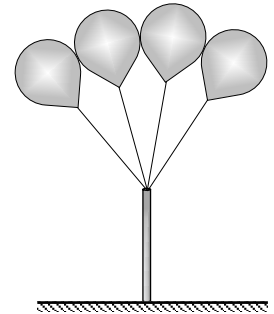
Разделив (2) на (1), и выразив искомую плотность, найдём

$$\rho = \frac{h_1}{h_2} \rho_0. \quad (2 \text{ б.})$$

Подставив сюда значения, найдём

$$\text{ответ: } \rho = \frac{h_1}{h_2} \rho_0 = 7250 \left(\text{кг/м}^3 \right). \quad (2 \text{ б.})$$

3. Школьнику на 17-летие подарили 17 воздушных шаров, наполненных гелием. Он решил узнать, сколько карандашей можно поднять в воздух с их помощью. Он стал привязывать шары к концу карандаша невесомой нитью. Когда он привязал 3 шара, карандаш всё ещё лежал на столе. Когда он привязал 4 шара, конец карандаша, к которому были привязаны нити, поднялся над столом. При этом, карандаш опирался на стол противоположным концом (см. рисунок). Какое максимальное количество карандашей можно поднять в воздух, чтобы они не касались стола, с помощью 17 воздушных шаров? Все шары и карандаши одинаковые.



Решение.

Пусть m — масса карандаша. Для того, чтобы поднять карандаш над столом (при том, что один конец опирается на стол), достаточно потянуть его за конец с силой $mg/2$, а, чтобы оторвать от стола — mg . (4 б.)

Пусть F — сила, с которой один воздушный шар тянет вверх привязанный к нему груз. Из условия следуют следующие неравенства:

$$\begin{cases} 3F \leq \frac{mg}{2}; \\ 4F \geq \frac{mg}{2}. \end{cases} \quad (4 \text{ б.})$$

Разделив первое и второе неравенство на 3 и 4, соответственно, и умножив их на 17, получим:

$$\begin{cases} 17F \leq \frac{17mg}{6} \approx 2,7 \cdot mg; \\ 17F \geq \frac{17mg}{8} \approx 2,1 \cdot mg. \end{cases}$$

Следовательно, сила $17F$, с которой 17 воздушных шаров тянут вверх привязанный к ним груз, удовлетворяет неравенству

$$2,1mg \leq 17F \leq 2,7mg ,$$

из которого следует

ответ: 2 шара. (2 б.)

4. Два автомобиля имеют все ведущие колеса и достаточную мощность двигателя, чтобы обеспечить максимальную силу тяги, которую позволяет дорога. Минимальное время разгона со старта автомобиля массы M_1 до скорости v равно t_1 , а минимальное время разгона до той же скорости автомобиля массы M_2 равно t_2 . Автомобили соединили «жесткой сцепкой», и этот тандем стартовал одновременно. За какое время t_x сцепленные автомобили достигнут скорости v ? Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение.

Чтобы разогнаться до скорости v , автомобили должны двигаться с ускорениями

$$a_1 = \frac{v}{t_1}, \quad (1 \text{ б.})$$

и

$$a_2 = \frac{v}{t_2}. \quad (1 \text{ б.})$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$F_{т1} = M_1 a_1, \quad (1 \text{ б.})$$

$$F_{т2} = M_2 a_2, \quad (1 \text{ б.})$$

где $F_{т1}$ и $F_{т2}$ — максимальные силы тяги, развиваемые автомобилями при разгоне. Аналогично для сцепки

$$a = \frac{v}{t_x}. \quad (1 \text{ б.})$$

$$F_t = (M_1 + M_2) a. \quad (2 \text{ б.})$$

Здесь a — необходимое для разгона ускорение сцепки, F_t — максимальная сила тяги, развиваемая сцепкой. Поскольку мощность двигателя у автомобилей достаточна, чтобы обеспечить максимальную силу тяги, то

$$F_t = F_{т1} + F_{т2}. \quad (1 \text{ б.})$$

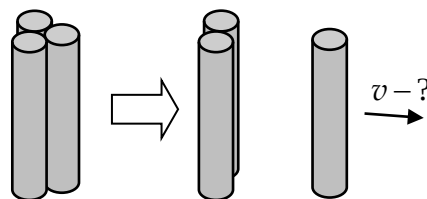
Решая полученные уравнения, найдём

$$\text{ответ: } t_x = \frac{M_1 + M_2}{\frac{M_1}{t_1} + \frac{M_2}{t_2}} = \frac{M_1 + M_2}{M_1 t_2 + M_2 t_1} t_1 t_2. \quad (2 \text{ б.})$$

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 11 класс.

1. Три одинаковые непроводящие палочки массой m каждая, равномерно и одинаково заряженные, удерживаются совмещёнными и прижатыми друг к другу. Одну из палочек отпускают, продолжая удерживать оставшиеся. Найти её скорость на большом расстоянии, если известно, что для совмещения двух палочек, изначально находящихся на большом расстоянии, необходимо затратить работу A .



Решение.

Чтобы совместить три палочки, изначально находящиеся далеко друг от друга, надо сблизить *три пары палочек*: 1-ю со 2-й, 1-ю с 3-й и 2-ю с 3-й, затратив тем самым работу $3A$. Поэтому

потенциальная энергия в начальном состоянии равна $3A$. (2 б.)

Когда одна из палочек улетела на большое расстояние, только *одна пара палочек* осталась сближенной. Следовательно,

потенциальная энергия в конечном состоянии равна A . (2 б.)

Кинетическая энергия системы в начальном состоянии равна нулю, а в конечном — равна $mv^2/2$. (2 б.)

Запишем закон сохранения энергии (потенциальной + кинетической):

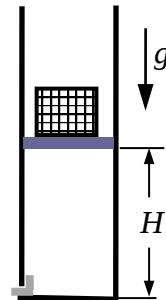
$$3A = A + \frac{mv^2}{2}. \quad (2$$

б.)

Выразив отсюда скорость v , получим

$$\text{ответ: } v = 2\sqrt{\frac{A}{m}}. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Закрытая снизу и открытая сверху труба стоит вертикально. Её заполнили идеальным газом и прикрыли невесомым герметичным поршнем площади сечения S так, что поршень зафиксировался на высоте H . Внизу трубы имеется «сравливающий» клапан, который выпускает газ, если давление превышает некоторое неизвестное значение. Если давление становится ниже этого значения, то клапан закрывается. На поршень поставили груз массы M и отпустили. Сколько молей газа вышло из трубы, если в результате поршень, после того, как температура газа стала снова равной температуре атмосферы T_0 , остановился на высоте $H/4$? Трением между поршнем и стенкой трубы пренебречь. Ускорение свободного падения g , универсальная газовая постоянная R , атмосферное давление P_0 .



Решение.

Обозначим начальное количество молей газа под поршнем v_0 , конечное количество молей газа v_1 . Тогда искомое количество молей вышедшего газа равно $v_0 - v_1$.

Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева

$$PV = \nu RT \quad (2 \text{ б.})$$

для газа под поршнем в начальном и конечном состояниях. В начале процесса давление газа равно P_0 , его объём равен SH , а температура равна T_0 . Следовательно,

$$P_0 \cdot SH = v_0 RT_0. \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

В конце процесса давление под поршнем равно $P_0 + Mg/S$, объём газа равен $SH/4$, температура равна T_0 , откуда

$$\left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) \cdot \frac{SH}{4} = v_1 RT_0. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

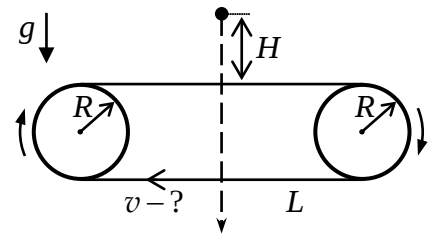
Выражая v_0 из (1) и v_1 из (2), найдём количество вытекшего газа v_x :

$$v_x = v_0 - v_1 = \frac{P_0 SH}{RT_0} - \frac{(P_0 + Mg/S) SH/4}{RT_0},$$

откуда, упрощая, получим

$$\text{ответ: } v_x = \frac{(3P_0 S - Mg) H}{4RT_0}. \quad (2 \text{ б.})$$

3. Из тонкой бумажной ленты длины L и двух цилиндрических валиков радиуса R соорудили транспортер, как показано на рисунке. С высоты H падает маленький камень в середину транспортера и пробивает отверстие в бумажной ленте. Найти, с какой минимальной постоянной скоростью двигалась лента транспортера, если известно, что камень при дальнейшем падении ещё раз попал в это же отверстие. Ускорение свободного падения g . Потерями энергии на разрыв камнем бумаги, а также влиянием воздуха пренебречь.



Решение.

Время t_1 , за которое камень упадёт на ленту с высоты H , равно

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

Время t_2 (с момента начала падения), за которое он достигнет нижнего края ленты, пройдя путь $H + 2R$, равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H + 2R)}{g}}. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

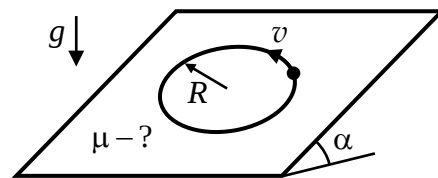
Минимальный путь, который пройдёт лента транспортера от момента t_1 первой встречи с камнем до момента t_2 второй встречи с ним, равен $L/2$. Следовательно, искомая минимальная скорость транспортера v равна

$$v = \frac{L/2}{t_2 - t_1}. \quad (3 \text{ б.})$$

Подставляя сюда t_1 и t_2 из (1) и (2), найдём

$$\text{ответ: } v = \frac{L\sqrt{g}}{2\sqrt{2}(\sqrt{H + 2R} - \sqrt{H})}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. Автомобиль движется с постоянной скоростью v по окружности на наклонной плоскости с углом α у основания. При каком минимальном коэффициенте трения колёс о плоскость это возможно? Ускорение свободного падения g . Радиус окружности R . Влиянием воздуха пренебречь.



Решение.

На автомобиль действуют следующие силы: сила тяжести mg (где m — масса автомобиля); сила реакции $\mathbf{N}$, направленная перпендикулярно плоскости движения; и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, параллельная этой плоскости. Согласно 2-му закону Ньютона,

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}}, \quad (1) \quad (1 \text{ б.})$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение автомобиля (центростремительное). При равномерном движении по окружности модуль ускорения равен

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (2) \quad (1 \text{ б.})$$

а направлено оно от автомобиля к центру окружности.

В проекции на ось, перпендикулярную к плоскости движения, равенство (1) принимает вид

$$0 = mg_{\perp} + N,$$

где $mg_{\perp}$ — проекция силы тяжести на эту ось. Поэтому

$$N = |mg_{\perp}| = mg \cos \alpha. \quad (3) \quad (1 \text{ б.})$$

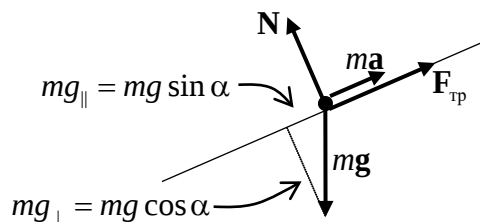
В проекции на плоскость движения автомобиля равенство (1) даёт

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\text{тр}}, \quad (4)$$

где $m\mathbf{g}_{\parallel}$ — проекция силы тяжести на эту плоскость, причём

$$|m\mathbf{g}_{\parallel}| = mg \sin \alpha. \quad (5)$$

При движении автомобиля векторы $m\mathbf{a}$ и $m\mathbf{g}_{\parallel}$ остаются постоянными по величине, а угол между ними меняется. Поэтому, согласно (4), максимальная величина силы трения $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ равна $|m\mathbf{a}| + |m\mathbf{g}_{\parallel}|$ и достигается в тот момент, когда векторы $m\mathbf{a}$ и $m\mathbf{g}_{\parallel}$ направлены противоположно



друг другу, т. е. в нижней точке траектории (см. рисунок). Выражая $|m\mathbf{a}|$ и $|m\mathbf{g}_{\parallel}|$ из (2) и (5), находим:

$$F_{\text{тр}}^{\text{max}} = \frac{mv^2}{R} + mg \sin \alpha. \quad (6) \quad (4 \text{ б.})$$

Сила трения не может превосходить μN , поэтому минимально возможный коэффициент трения μ равен

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}^{\text{max}}}{N}. \quad (1 \text{ б.})$$

Подставляя $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ из (6) и N из (3), получим

$$\text{ответ: } \mu = \frac{v^2}{Rg \cos \alpha} + \tan \alpha. \quad (2 \text{ б.})$$